

TD 1 — Modèle de Poisson (R)

Année universitaire 2025–2026 ▪ Parcours Économie de la santé & Développement durable

Pierre Beaucoral

Contexte: On étudie d'anciennes données reliant **tabagisme** et **décès par cancer du poumon**. Variables : `age` (classes), `smoking status` (4 classes), `population` (centaines de milliers), `deaths` (décès annuels).

Préparation

Objectifs de ce TD

- Importer et préparer un tableau **comptages + exposition** (population à risque).
- Ajuster un **GLM Poisson** avec *offset* (log-exposition).
- Évaluer l'ajustement : **déviance** (vs modèle saturé) & **Pearson**.
- Comparer des modèles via **tests de rapport de vraisemblance (LR)**.
- Interpréter en **ratios de taux d'incidence (IRR)** et produire des **comptes attendus**.

Packages

```
# installer si nécessaire : install.packages(c("readxl", "dplyr", "tidyverse", "janitor", "ggplot2", "broom", "gt", "DescTools"))
library(readxl)
library(dplyr)
library(tidyverse)
library(janitor)
library(ggplot2)
library(broom)
library(gt)
library(performance)    # check_overdispersion
library(DescTools)      # PChisq for GOF (si besoin)
```

Rappel de cours — Régression de Poisson

La **régression de Poisson** est un modèle linéaire généralisé (GLM) adapté aux données de **comptage** (ex. nombre de décès, d'accidents, de visites).

Formulation :

- Variable dépendante : un comptage $Y_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$. - Loi supposée : $Y_i \sim \text{Poisson}(\mu_i)$ avec $\mathbb{E}[Y_i] = \mu_i$.
- Lien log :

$$\log(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \dots + \beta_p X_{pi} + \log(\text{exposition}_i)$$

où l'offset $\log(\text{exposition}_i)$ tient compte de la taille de la population ou du temps d'observation.

Pourquoi utiliser ce modèle ?

- Les données sont des comptages positifs (non négatifs).
- La variance est proportionnelle à la moyenne ($\text{Var}(Y) = \mu$).
- On cherche à modéliser des **taux d'incidence** (décès/population, accidents/temps).

Interprétation des coefficients :

- Les β_j s'interprètent via l'**Incidence Rate Ratio (IRR)** :

$$IRR_j = e^{\beta_j}$$

→ $IRR_j > 1$: le taux est plus élevé que la référence.
→ $IRR_j < 1$: le taux est plus faible.

Diagnostics courants :

- Tests de qualité d'ajustement (déviance, Pearson).
- Vérification de la sur-dispersion (si $\text{Var}(Y) > \mu$, préférer quasi-Poisson ou binomiale négative).

Extensions :

- Modèle de Poisson avec offset (exposition).
- Quasi-Poisson pour corriger la variance.
- Binomiale négative pour sur-dispersion forte.

Import et manipulation des données

Importer les données smoking_dat.xlsx

Dans l'énoncé, les données à importer sont `smoking_dat.xlsx` et les variables `age`, `smoking status`, `population`, `deaths`.

Note

Dictionnaire des variables :

- age: en classes (40-44, 45-49, 50-54, 55-59, 60-64, 65-69, 70-74, 75-79, 80+).
 - smoking status: 4 classes (ne fume pas / fume le cigare ou la pipe / fume la cigarette et le cigare ou la pipe ; fume seulement la cigarette)
 - population: en centaine de milliers de personnes
 - deaths: comptage des décès par cancer du poumon en un an.

```
# Chemin suggéré : placez le fichier dans data/smoking_dat.xlsx
# Si vous avez un CSV, remplacez read_excel par read.csv(...)
data_path <- "data/smoking_dat.xlsx"

df <- read_excel(data_path) |>
  clean_names()

# Harmonisation de noms
# On s'attend à des colonnes: age (classes), smoking_status (4 classes), population, deaths
df <- df |>
  rename(
    age = matches("^age$|^age_class|^agecat"),
    smoking_status = matches("^smoking|^smoke"),
    population = matches("^pop|^population"),
    deaths = matches("^deaths|^dead"))
  )

glimpse(df)
```

Coder les deux variables enregistrées en texte avec des chiffres

En Stata on ferait `encode + i.variable`.

En R, il suffit de déclarer les variables comme `factor`.

```
df <- df |>
  mutate(
    age = factor(age, ordered = FALSE),
    smoking_status = factor(smoking_status, ordered = FALSE)
  )

# Vérification des niveaux
levels(df$age); levels(df$smoking_status)

[1] "40-44" "45-59" "50-54" "55-59" "60-64" "65-69" "70-74" "75-79" "80+"

[1] "cigarPipeOnly"  "cigaretteOnly" "cigarettePlus" "no"
```

i Note

Rappel : Les facteurs indiquent à R qu'il s'agit de variables qualitatives. Chaque modalité sera transformée en **variable indicatrice** (dummy) dans la régression.

Unité d'exposition

L'énoncé précise que `population` est en **centaines de milliers**. Pour une interprétation plus intuitive, on peut ramener l'exposition à l'unité **personne** (facultatif) :

```
# Ici, on transforme 'population' en nombre de personnes si besoin.
# Exemple: si population = 2.3 signifie 2.3 * 100 000 personnes :
expo_personnes <- TRUE
scale_factor <- 1e5

df <- df |>
  mutate(
    exposure = if (expo_personnes) population * scale_factor else population
  )
summary(df$exposure)
```

	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
9800000	36925000	85850000	155894444	230550000	605200000	

Estimations

Appliquer un premier modèle de régression log-linéaire

Modèle Poisson **log-linéaire** avec effets de `smoking_status` et `age`, et `offset log(exposure)` : c'est l'équivalent de Stata `poisson deaths i.smokecod i.agecod, exposure(pop)`.



Pourquoi un modèle de Poisson ?

Les données sont des **comptages** (nombre de décès).

Le modèle de Poisson relie l'**espérance** de ces comptages à des variables explicatives par une fonction de lien log :

$$\log(\mathbb{E}[Y]) = X\beta$$

Cette structure garantit que la prédiction est **positive** et que la variance est proportionnelle à la moyenne (hypothèse de Poisson).

Nous voulons expliquer le nombre de décès par l'âge et le statut tabagique, en tenant compte de l'exposition.

```
mod1 <- glm(deaths ~ smoking_status + age + offset(log(exposure)),
              family = poisson(link = "log"), data = df)

summary(mod1)
```

Call:

```
glm(formula = deaths ~ smoking_status + age + offset(log(exposure)),
     family = poisson(link = "log"), data = df)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	-15.14514	0.06783	-223.293	< 2e-16 ***
smoking_statuscigaretteOnly	0.36915	0.03791	9.737	< 2e-16 ***
smoking_statuscigarettePlus	0.17015	0.03643	4.671	3.00e-06 ***
smoking_statusno	-0.04781	0.04699	-1.017	0.309
age45-59	0.55388	0.07999	6.924	4.38e-12 ***
age50-54	0.98039	0.07682	12.762	< 2e-16 ***
age55-59	1.37946	0.06526	21.138	< 2e-16 ***

```

age60-64           1.65423   0.06257   26.439 < 2e-16 ***
age65-69           1.99817   0.06279   31.824 < 2e-16 ***
age70-74           2.27141   0.06435   35.296 < 2e-16 ***
age75-79           2.55858   0.06778   37.746 < 2e-16 ***
age80+             2.84692   0.07242   39.310 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

Null deviance: 4055.984 on 35 degrees of freedom
Residual deviance: 21.487 on 24 degrees of freedom
AIC: 285.51

Number of Fisher Scoring iterations: 4

```

! Important

L'argument `offset(log(exposure))` ajoute le **log de l'exposition** avec un coefficient fixé à 1. Cela revient à modéliser un **taux** de décès (décès / population).

Quelle interprétation?

On peut utiliser $\exp(\beta_i)$ pour retrouver **l'Incidence Rate Ratio (IRR)**. On le lit comme le coefficient multiplicateur de l'occurrence de Y (ici le décès) par rapport à la catégorie de référence.

Calculer la déviance du modèle ajusté. DEV1

```

dev1 <- deviance(mod1)      # Deviance du modèle vs saturé
df_dev1 <- df.residual(mod1)
c(dev1 = dev1, df = df_dev1, p_value = pchisq(dev1, df_dev1, lower.tail = FALSE))

      dev1      df    p_value
21.486738 24.000000  0.609872

```

Quel est l'effet de l'âge sur la probabilité de décès par cancer du poumon ?

Interprétez les coefficients associés aux **modalités d'âge** (comparées à la catégorie de référence) en termes d'IRR (voir section IRR) et/ou d'impact sur le **taux de décès** (à exposition fixée). (Discussion attendue.)

Interprétez les coefficients d'âge ($\text{IRR} = \exp(\text{coef})$) :

- $\text{IRR} > 1$: taux de décès plus élevé que la catégorie de référence.
- $\text{IRR} < 1$: taux plus faible.

Sauvegarde du modèle (utile pour LR tests)

```
# En R, on garde l'objet en mémoire (mod1). Pas besoin d'"estimates store".  
# On peut aussi l'ajouter à une liste si on veut gérer plusieurs modèles :  
models <- list(mod1 = mod1)
```

Tester l'ajustement de ce modèle

Pour cela nous allons réaliser **deux tests** :

- **Deviance GOF** (modèle ajusté vs **saturé**).
- **Pearson GOF** (comparaison effectifs attendus vs observés). Les **degrés de liberté** correspondent ici au nombre de cellules moins le nombre de paramètres estimés (y compris l'interception). L'énoncé suggère **24 df** pour chacun de ces tests (voir justification plus bas).

```
# Deviance test (déjà calculé ci-dessus)  
dev_stat  <- deviance(mod1)  
dev_df    <- df.residual(mod1)  
dev_p     <- pchisq(dev_stat, dev_df, lower.tail = FALSE)  
  
# Pearson GOF (somme  $(y - \mu)^2 / \mu$ ) et chi2 approx avec mêmes df résiduels  
mu_hat    <- fitted(mod1)           # comptages attendus  
y_obs     <- df$deaths  
pearson   <- sum((y_obs - mu_hat)^2 / mu_hat)  
pearson_p <- pchisq(pearson, dev_df, lower.tail = FALSE)  
  
tibble(  
  test = c("Deviance GOF", "Pearson GOF"),  
  statistic = c(dev_stat, pearson),  
  df = c(dev_df, dev_df),  
  p_value = c(dev_p, pearson_p))  
) |>  
  gt()
```

test	statistic	df	p_value
Deviance GOF	21.48674	24	0.6098720
Pearson GOF	20.61936	24	0.6610658

Justifiez pourquoi ces tests sont effectués avec le même df.



Tip

Rappel : pour un GLM Poisson, $df = N - p$, où N est le nombre de cellules et p le nombre de paramètres estimés (y compris l'interception). Discuter les **conditions d'un χ^2** (souvent $\hat{\mu} \geq 5$ dans la plupart des cellules).



Important

La p-value de ce modèle est élevée, on ne rejète donc pas H_0 , pour rappel, on rejète H_0 quand une p-value $< 0,05$. Dans ce test (deviance GOF):

- H_0 : absence de différences entre le modèle estimant parfaitement les observations et notre spécification
- H_1 : différences entre le modèle estimant parfaitement les observations et notre spécification

C'est un test où l'on est rassuré par une p-value élevée!

Ajuster un modèle sans la variable `smoke`, et effectuer un test de rapport de vraisemblance entre ce nouveau modèle et celui précédemment sauvegardé

On ajuste un modèle **sans tabac** et on compare à `mod1` par **LR test**. En Stata : `lrtest`. En R : `anova(mod0, mod1, test="Chisq")`.

```
mod0 <- glm(deaths ~ age + offset(log(exposure)),
             family = poisson, data = df)

anova(mod0, mod1, test = "Chisq")
```

Analysis of Deviance Table

Model 1: `deaths ~ age + offset(log(exposure))`

```

Model 2: deaths ~ smoking_status + age + offset(log(exposure))
      Resid. Df Resid. Dev Df Deviance Pr(>Chi)
1          27    191.723
2          24    21.487  3   170.24 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Conclure sur l'impact de l'usage du tabac sur la probabilité de décès par cancer du poumon.

Le modèle avec modalités d'usage du tabac a une deviance plus faible et statistiquement différente du modèle sans la modalité. L'usage du tabac est donc un élément important dans la prédiction ou l'incidence de la mortalité qu'on ne peut négliger pour expliquer celle-ci. Le test nous permet de dire que les modalités d'usage du tabac sont importantes pour expliquer la probabilité de décès, toutefois il ne nous dit pas dans quel sens (augmentation ou réduction) pour cela, se référer au tableau de régression.

Construire une nouvelle variable qui prend la valeur 1 si l'individu fume des cigarettes, 0 s'il n'en fume pas.

Créer une variable `cigarette_user` égale à **1 si l'individu fume des cigarettes, 0 sinon** : l'énoncé demande de distinguer le type de produit et de concentrer l'attention sur la cigarette.

```

# Adaptez le motif à vos libellés (ex.: "fume seulement la cigarette", "cigarette + cigare/pip...").
# On classera 1 si l'étiquette contient "cigarette", 0 sinon.
df <- df |>
  mutate(
    cigarette_user = as.integer(grepl("cigarette", tolower(as.character(smoking_status)))))
  )
  table(df$cigarette_user, df$smoking_status)

```

	cigarPipeOnly	cigaretteOnly	cigarettePlus	no
0	9	0	0	9
1	0	9	9	0

Ajuster un troisième modèle avec effet de l'âge et de cette variable d'usage de la cigarette.

```
mod2 <- glm(deaths ~ cigarette_user + age + offset(log(exposure)),  
            family = poisson, data = df)  
  
summary(mod2)
```

Call:

```
glm(formula = deaths ~ cigarette_user + age + offset(log(exposure)),  
     family = poisson, data = df)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	-15.15590	0.06378	-237.625	< 2e-16 ***
cigarette_user	0.26910	0.02757	9.762	< 2e-16 ***
age45-59	0.55342	0.07999	6.919	4.56e-12 ***
age50-54	0.98480	0.07682	12.820	< 2e-16 ***
age55-59	1.37640	0.06526	21.092	< 2e-16 ***
age60-64	1.64629	0.06256	26.317	< 2e-16 ***
age65-69	1.99023	0.06277	31.708	< 2e-16 ***
age70-74	2.26143	0.06432	35.161	< 2e-16 ***
age75-79	2.54560	0.06766	37.626	< 2e-16 ***
age80+	2.82907	0.07215	39.211	< 2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

Null deviance: 4055.984 on 35 degrees of freedom
Residual deviance: 92.237 on 26 degrees of freedom
AIC: 352.26

Number of Fisher Scoring iterations: 4

```
anova(mod2, test = "Chisq")
```

Analysis of Deviance Table

```

Model: poisson, link: log

Response: deaths

Terms added sequentially (first to last)

          Df Deviance Resid. Df Resid. Dev  Pr(>Chi)
NULL           35     4056.0
cigarette_user  1      58.3      34    3997.6 2.195e-14 ***
age            8    3905.4      26     92.2 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Comparer ce modèle avec le modèle initial par un test de rapport de vraisemblance

On compare le **modèle multiniveaux par type de tabac** (mod1) avec le **modèle binaire cigarette vs non** (mod2).

```
anova(mod2, mod1, test = "Chisq")
```

Analysis of Deviance Table

```

Model 1: deaths ~ cigarette_user + age + offset(log(exposure))
Model 2: deaths ~ smoking_status + age + offset(log(exposure))
          Resid. Df Resid. Dev Df Deviance Pr(>Chi)
1           26     92.237
2           24    21.487  2     70.75 4.334e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Le type de produit fumé semble-t-il influencer la probabilité de décès par cancer du poumon ?

En Poisson log-linéaire : **IRR = exp(coef)**. On reporte aussi des **IC 95%** exponentiés.

IRR (modèle 1) — exp(coef) avec IC 95%

term	estimate	conf.low	conf.high	p.value
age80+	1.723470e+01	1.496968e+01	1.988626e+01	0.000000e+00
age75-79	1.291740e+01	1.132626e+01	1.477500e+01	0.000000e+00
age70-74	9.693017e+00	8.558760e+00	1.101560e+01	6.852385e-273
age65-69	7.375556e+00	6.533324e+00	8.357251e+00	2.978913e-222
age60-64	5.229045e+00	4.633991e+00	5.922596e+00	4.943059e-154
age55-59	3.972749e+00	3.501347e+00	4.522490e+00	3.581870e-99
age50-54	2.665487e+00	2.294116e+00	3.100656e+00	2.658489e-37
age45-59	1.739985e+00	1.487796e+00	2.036040e+00	4.376858e-12
smoking_statuscigaretteOnly	1.446509e+00	1.343418e+00	1.558691e+00	2.099342e-22
smoking_statuscigarettePlus	1.185481e+00	1.104252e+00	1.273769e+00	3.001586e-06
smoking_statusno	9.533182e-01	8.692799e-01	1.045138e+00	3.090007e-01
(Intercept)	2.645745e-07	2.312255e-07	3.016715e-07	0.000000e+00

```
tidy(mod1, conf.int = TRUE, exponentiate = TRUE) |>
  select(term, estimate, conf.low, conf.high, p.value) |>
  arrange(desc(estimate)) |>
  gt() |>
  tab_header(title = "IRR (modèle 1) - exp(coef) avec IC 95%")
```

Extensions

Comptes attendus & tableau Observé vs Attendu

```
df_preds <- df |>
  mutate(
    y_obs = deaths,
    mu_hat = fitted(mod1)
  )

df_preds |>
  select(age, smoking_status, exposure, y_obs, mu_hat) |>
  arrange(age, smoking_status) |>
  gt() |>
  fmt_number(columns = c(exposure, y_obs, mu_hat), decimals = 2)
```

age	smoking_status	exposure	y_obs	mu_hat
40-44	cigarPipeOnly	14,500,000.00	2.00	3.84
40-44	cigaretteOnly	341,000,000.00	124.00	130.50
40-44	cigarettePlus	453,100,000.00	149.00	142.11
40-44	no	65,600,000.00	18.00	16.55
45-59	cigarPipeOnly	10,400,000.00	4.00	4.79
45-59	cigaretteOnly	223,900,000.00	140.00	149.10
45-59	cigarettePlus	303,000,000.00	169.00	165.36
45-59	no	35,900,000.00	22.00	15.76
50-54	cigarPipeOnly	9,800,000.00	3.00	6.91
50-54	cigaretteOnly	185,100,000.00	187.00	188.82
50-54	cigarettePlus	226,700,000.00	193.00	189.53
50-54	no	24,900,000.00	19.00	16.74
55-59	cigarPipeOnly	37,200,000.00	38.00	39.10
55-59	cigaretteOnly	327,000,000.00	514.00	497.17
55-59	cigarettePlus	468,200,000.00	576.00	583.40
55-59	no	63,200,000.00	55.00	63.33
60-64	cigarPipeOnly	84,600,000.00	113.00	117.04
60-64	cigaretteOnly	379,100,000.00	778.00	758.66
60-64	cigarettePlus	605,200,000.00	1,001.00	992.58
60-64	no	106,700,000.00	117.00	140.73
65-69	cigarPipeOnly	94,900,000.00	173.00	185.19
65-69	cigaretteOnly	242,100,000.00	689.00	683.37
65-69	cigarettePlus	388,000,000.00	901.00	897.57
65-69	no	89,700,000.00	170.00	166.87
70-74	cigarPipeOnly	82,400,000.00	212.00	211.32
70-74	cigaretteOnly	119,500,000.00	432.00	443.30
70-74	cigarettePlus	203,300,000.00	613.00	618.07
70-74	no	66,800,000.00	179.00	163.31
75-79	cigarPipeOnly	66,700,000.00	243.00	227.95
75-79	cigaretteOnly	43,600,000.00	214.00	215.54
75-79	cigarettePlus	87,100,000.00	337.00	352.89
75-79	no	36,100,000.00	120.00	117.62
80+	cigarPipeOnly	53,700,000.00	253.00	244.86
80+	cigaretteOnly	11,300,000.00	63.00	74.53
80+	cigarettePlus	34,500,000.00	189.00	186.49
80+	no	27,400,000.00	120.00	119.11

Vérification d'éventuelle sur-dispersion

Le GLM Poisson suppose $\text{Var}(Y) = E[Y]$. Si $\text{Var}(Y) \gg E[Y]$, la **sur-dispersion** peut invalider les tests usuels (SE sous-estimés).

```
check_overdispersion(mod1)
```

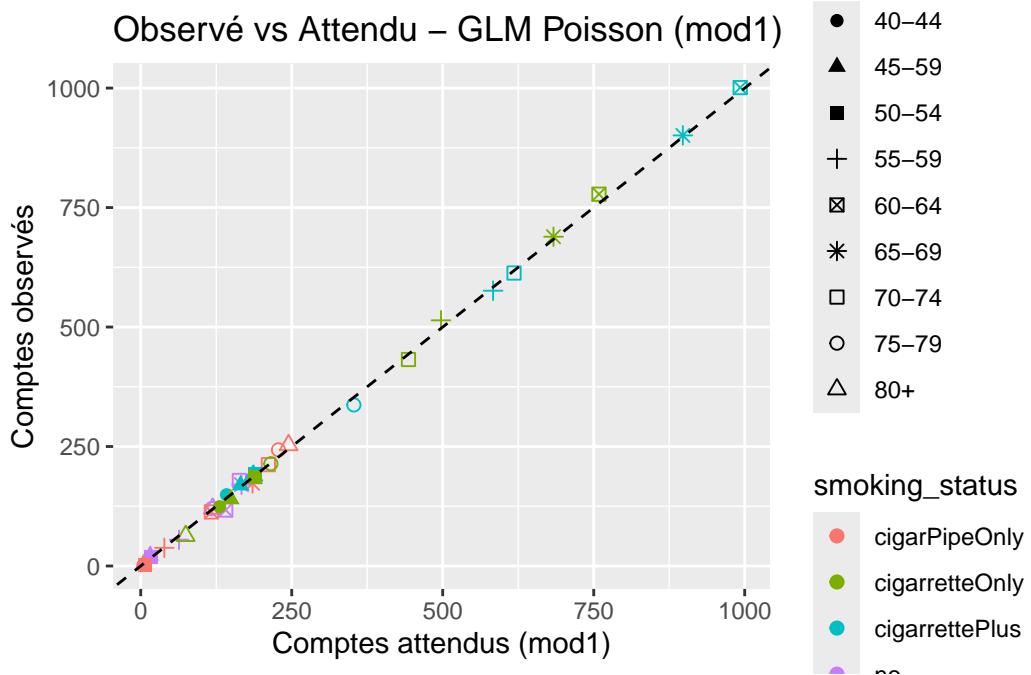
```
# Overdispersion test

  dispersion ratio = 0.859
Pearson's Chi-Squared = 20.619
      p-value = 0.661
```

En cas de sur-dispersion marquée, envisagez **Quasi-Poisson** (`family = quasipoisson`) ou **Négative Binomiale** (`MASS::glm.nb`) et comparez l'ajustement.

Graphiques (facultatifs)

```
shapes_9 <- c(16, 17, 15, 3, 7, 8, 0, 1, 2) # à ta convenance
ggplot(df_preds, aes(mu_hat, y_obs, color = smoking_status, shape = age)) +
  geom_point(size = 2) +
  geom_abline(intercept = 0, slope = 1, linetype = 2) +
  scale_shape_manual(values = shapes_9) +
  labs(x = "Comptes attendus (mod1)", y = "Comptes observés",
       title = "Observé vs Attendu - GLM Poisson (mod1)")
```



Bilan

- Le modèle de Poisson permet d'estimer des **taux de décès** en fonction du tabagisme et de l'âge.
- Les **tests d'ajustement** (déviance, Pearson) valident le modèle si p-value élevée.
- Le **tabagisme** a un impact significatif sur la mortalité par cancer du poumon.
- Les **IRR** offrent une interprétation intuitive : *par rapport à la catégorie de référence, combien de fois le taux de décès est-il multiplié.*

Conseil pratique : en recherche appliquée, vérifiez toujours la sur-dispersion et documentez les hypothèses de variance (Poisson vs quasi-Poisson vs binomiale négative).